DiMawe
Die Materialwerkstatt
Zeitschrift für Konzepte und Arbeitsmaterialien für Lehrer*innenbildung und Unterricht

Zum Nacherfinden. Konzepte und Materialien für Unterricht und Lehre
Online-Supplement

Schüler*innen lernen selbstständig das Modellieren mit Exponentialfunktionen

Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht durch digitale gestufte Lernhilfen

Online-Supplement 3: Arbeitsblatt mit Lösungen

Philipp Hamers[1], Holger Bekel-Kastrup[1], Svea Isabel Kleinert[2], Darius Haunhorst[2] & Matthias Wilde[2,*]

[1] *Oberstufen-Kolleg an der Universität Bielefeld*
[2] *Universität Bielefeld*
[*] *Kontakt: Universität Bielefeld,*
Fakultät für Biologie, Biologiedidaktik (Zoologie/Humanbiologie),
Universitätsstr. 25, 33615 Bielefeld
matthias.wilde@uni-bielefeld.de

Zitationshinweis:
Hamers, P., Bekel-Kastrup, H., Kleinert, S.I., Haunhorst, D. & Wilde, M. (2022). Schüler*innen lernen selbstständig das Modellieren mit Exponentialfunktionen. Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht durch digitale gestufte Lernhilfen [Online-Supplement 3: Arbeitsblatt mit Lösungen]. *DiMawe – Die Materialwerkstatt, 4* (1), 73–78. https://doi.org/10.11576/dimawe-5474

Online verfügbar: 09.06.2022

ISSN: 2629–5598

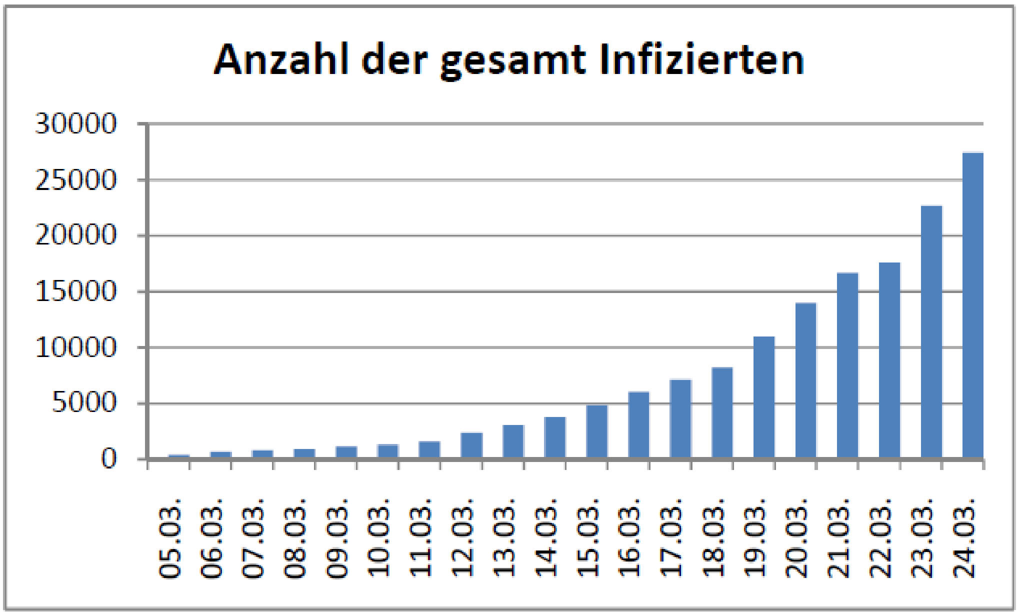
Leitfrage: Wie kann ich voraussagen, wie viele Leute in Zukunft infiziert sind?

Spätestens seit dem 16.03.2020 sind in allen Bundesländern weitreichende Maßnahmen in Kraft getreten (u.a. wurden die Schulen geschlossen), um die Ausbreitung des COVID-19-Virus (Corona) zu verhindern.

Im Folgenden bezieht sich das Wort „Infizierte*r“ auf diejenigen Menschen, welche die Krankheit im Laufe der gesamten Pandemie haben oder haben werden, unabhängig davon, ob sie genesen sind oder nicht.

Folgende Daten wurden vom Robert-Koch-Institut[1] im März 2020 veröffentlicht:

Datum	Zahl der insgesamt Infizierten
05.03. Do	400
06.03. Fr	639
07.03. Sa	795
08.03. So	902
09.03. Mo	1.139
10.03. Di	1.296
11.03. Mi	1.567
12.03. Do	2.369
13.03. Fr	3.062
14.03. Sa	3.795
15.03. So	4.838
16.03. Mo	6.012
17.03. Di	7.156
18.03. Mi	8.198
19.03. Do	10.999
20.03. Fr	13.957
21.03. Sa	16.662
22.03. So	17.610
23.03. Mo	22.672
24.03. Di	27.436



[1] Vgl. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Archiv.html.

Aufgaben

Bei einer Pandemie ist es wichtig, Prognosen über zukünftige Infektionszahlen zu tätigen, um mit entsprechenden Maßnahmen reagieren zu können.

a) Erklärt, warum es aus epidemiologischer Sicht sinnvoll ist, einen exponentiellen Verlauf der Krankheit anzunehmen.

b) Erstellt zwei exponentielle Modelle, mit denen man die Zahl der gesamt Infizierten in Abhängigkeit von den Tagen nach dem 05.03.2020 bestimmen kann, und prognostiziert mit ihnen die Zahl der gesamt Infizierten für den 25.03.2020.
Das erste Modell soll anhand der Daten vom 05.03.2020 und vom 06.03.2020 erstellt werden und das zweite Modell anhand der Daten vom 05.03.2020 und vom 24.03.2020.
Berechnet mit beiden Modellen, wie viele Personen am 25.03.2020 infiziert wären.

c) Am 25.03.2020 meldete das RKI eine Gesamtanzahl von 31.554 Infizierten. Beurteilt die Güte der Modelle anhand dieser Aussage und erklärt, warum das eine Modell eine deutlich bessere Vorhersage getroffen hat.

Zusatzaufgabe:

Angenommen, durch eine Ausgangssperre könnte man den Wachstumsfaktor der Infektionszahlen um 0,05 senken, durch eine weitreichende Maskenpflicht um 0,08 und durch eine Schließung der Geschäfte des Einzelhandels sogar um 0,1.

Begründet, durch welche am 05.03. in Kraft getretenen Maßnahmen man die Infektionszahlen zum 15.03. sogar unter 5.500 hätte halten können. Nutzt dabei das in Aufgabe b) erstellte Modell 2.

Erklärt, warum der Wachstumsfaktor – egal bei welchen Maßnahmen – nie unter 1 fallen kann.

Lösung

a) Die Daten lassen einen exponentiellen Verlauf vermuten, da es zunächst wenige Infizierte gab und dann die Zahl rapide angestiegen ist. Gleichzeitig ergibt es auch aus epidemiologischer Sicht Sinn, da jede*r Infizierte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit weitere Personen infiziert und sich so die Infiziertenzahl von einem Tag zum nächsten mit einem annähernd gleichen Faktor verändert.

b) Gesucht sind exponentielle Modelle, also Funktionen der Form: $f(x) = c \cdot a^x$

<u>Modell 1:</u>
$f(0) = 400$; daraus folgt: $c = 400$.
Aus $f(1) = 639$ folgt: $639 = 400 \cdot a^1$ und so $a = \frac{639}{400} = 1{,}5975$.

Die Funktionsgleichung für Modell 1 lautet: $f(x) = 400 \cdot 1{,}5975^x$.

Der Prognosewert für den 25.03.2020 (Tag 20) liegt bei: $f(20) = 400 \cdot 1{,}5975^{20} \approx 4.685.810$.

Modell 2:
$f(0) = 400$; daraus folgt: $c = 400$.
Aus $f(19) = 27.436$ folgt: $27.436 = 400 \cdot a^{19}$ und so $a = \sqrt[19]{\frac{27436}{400}} \approx 1{,}2482$.

Die Funktionsgleichung für Modell 2 lautet: $f(x) = 400 \cdot 1{,}2482^x$.

Der Prognosewert für den 25.03.2020 (Tag 20) liegt bei: $f(20) = 400 \cdot 1{,}2482^{20} \approx 33.708$.

c) Das zweite Modell ist deutlich besser. Das liegt daran, dass bei dem ersten Modell der Wachstumsfaktor viel zu hoch ist. Dies ist entstanden, da das erste Modell nur die ersten beiden Tage zur Prognose verwendet und das zweite Modell zwei Tage nutzt, die deutlich weiter voneinander entfernt sind, und so Tagesschwankungen zwischen diesen beiden Tagen ausgleicht.

Zusatzaufgabe:

Aus 5.500 am 15.03. folgt das Wertepaar: (20|5500).
Damit folgt: $5.500 = 400 \cdot b^{20}$. Durch Umformen der Gleichung folgt: $b = 1{,}14$.
D.h., der Wachstumsfaktor dürfte maximal 1,14 sein. Um von dem Wachstumsfaktor des zweiten Modells 1,2482 auf 1,14 zu kommen, muss man Maßnahmen ergreifen, die den Wachstumsfaktor um $1{,}2482 - 1{,}14 = 0{,}1082$ senken.
D.h., eine Maßnahme alleine würde nicht reichen, aber zwei Kombinationen zusammen (egal welche) würden ausreichen, um den gewünschten Effekt zu erhalten.