DiMawe
Die Materialwerkstatt
Zeitschrift für Konzepte und Arbeitsmaterialien für Lehrer*innenbildung und Unterricht

Zum Nachdenken.
Reflexion über Konzepte, Material und Befunde

Mathematische Grundvorstellungen durch Bewegungen aufbauen

Potenziale bewegten Lernens aufgezeigt am Beispiel von Bewegungen auf dem „Zahlenteppich“ zur Förderung des Stellenwertverständnisses

Lena Radünz[1,*] & Ralf Benölken[1,*]

[1] *Bergische Universität Wuppertal*
[*] *Kontakt: Bergische Universität Wuppertal,*
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften,
Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik,
Gaußstr. 20, 42119 Wuppertal
raduenz@uni-wuppertal.de; benoelken@uni-wuppertal.de

Zusammenfassung: Lernbegleitende Formen bewegten Lernens erlangten bereits eine gewisse Bekanntheit und Verbreitung. Bewegtes Lernen kann aber auch lernerschließend gestaltet werden, so dass es für mathematische Lehr-Lern-Prozesse die Funktion einer Entfaltung sogenannter „Grundvorstellungen“ einzunehmen vermag. Hieraus entsteht eine Brücke zu einem der Hauptkonzepte und -ziele des Mathematikunterrichts, insbesondere mit Blick auf ein verstehensorientiertes Lernen als eines der Grundpostulate der Fachdidaktik Mathematik. Der Beitrag stellt für den skizzierten interdisziplinären Zugang zwischen Sportwissenschaft und Mathematikdidaktik theoretische Hintergründe einerseits und konkrete Beispiele entsprechender Lernumgebungen andererseits vor, wobei der Aufbau eines tragfähigen Verständnisses des dekadischen Stellenwertsystems den Anker der Betrachtung bildet. In diesem Kontext wird insbesondere ein „Zahlenteppich“ vorgestellt, der eine Adaption der bekannten „Hundertertafel“ darstellt und speziell für ein Lernen von Mathematik „durch Bewegung“ entwickelt wurde. Dabei möchte der Beitrag ausgehend von der Theorie-Praxis-Verknüpfung in zwei Punkten zum Nachdenken anregen: Zum einen sollen auf theoretischer Ebene Anstöße zur Reflexion des Aufbaus langjährig etablierter Anschauungsmittel gegeben werden. Zum anderen soll auf praktischer Ebene das Potenzial zur Förderung von Grundvorstellungen durch Bewegungen analysiert werden.

Schlagwörter: bewegtes Lernen, Grundvorstellungen, Stellenwertverständnis, Hundertertafel, Zahlenteppich

1 Einführung

Kindliches Lernen gilt in aktuellen Lerntheorien in der Regel als individueller und aktiv-konstruktiver Prozess (vgl. u.a. Tobinski & Fritz, 2018). Hieraus ergeben sich zugleich große Herausforderungen, nämlich beispielsweise individuelle Bedürfnisse, interindividuell unterschiedliches Vorwissen oder sogar divergierende individuelle Sinnkonstruktionen (etwa zu Zahlen und Operationen; siehe z.B. Käpnick, 2004) anzunehmen und produktiv für die Erschließung individualisierter Lernwege zu nutzen. Dazu gehört auch der Aufbau individuell tragfähiger Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten bzw. ganzer Netzwerke solcher Grundvorstellungen. Das Konstrukt der Grundvorstellungen fokussiert die Entfaltung mentaler Modelle zu den jeweiligen Fachinhalten, weshalb deren Aufbau mit einem konsequent verstehensorientierten Kompetenzerwerb im Kontext des Lehrens und Lernen von Mathematik einhergeht – ein seit Langem zentrales Ziel des Mathematikunterrichts überhaupt (u.a. vom Hofe, 1996).

Bewegung aktiv in Lernprozesse einzubeziehen, ist ebenso wenig oder gar noch viel weniger neu. So stellten verschiedene Reformpädagog*innen bereits Anfang des 20. Jahrhunderts die Bedeutung von Bewegung für kindliche Lern- und Entwicklungsprozesse heraus (zusammenfassend z.B. Laging, 2006). Erst im letzten Fünftel jenes Jahrhunderts begann man, produktive Wirkungen von Bewegung auf Lernprozesse über reformpädagogische Kontexte hinaus zu diskutieren, wozu – zunächst wenig überraschend – insbesondere Sportwissenschaftler*innen durch Konzepte einer „Bewegten Schule“ beitrugen. Dieser Zugang wird seitdem verstärkt in der sportpädagogisch-didaktischen Literatur (u.a. Thiel, Teubert & Kleindienst-Cachay, 2013), zunehmend jedoch auch interdisziplinär beleuchtet – als Beispiel sei die Arbeit von Arndt und Sambanis (2017) genannt, in der die Schnittstelle von Bewegung, Didaktik und Neurowissenschaften in den Blick genommen wird. Insbesondere findet eine bereits von Reformpädagog*innen angeregte lern- und entwicklungspsychologische Perspektive immer mehr Beachtung.

Der vorliegende Beitrag versucht eine Verbindung der beiden zuvor skizzierten Strömungen[1]– Förderung mathematischer Grundvorstellungen und lernerschließendes Bewegen. Das Ziel besteht darin, Potenziale des epistemologischen (also erkenntnistheoretischen!) Werts bewegten Lernens an einem konkreten Beispiel aufzuzeigen und für ein Weiterdenken etablierter Anschauungsmittel als Vermittler des Grundvorstellungsaufbaus in diesem Kontext zu nutzen. Den exemplarischen Anker bieten Grundvorstellungen zum dekadischen Stellenwertsystem, mit anderen Worten Überlegungen zur Förderung des „Stellenwertverständnisses“. Zunächst werden theoretische Fundamente zum Grundvorstellungskonstrukt, insbesondere mit Blick auf das Beispiel des Stellenwertverständnisses, und zum bewegten Lernen skizziert. Anschließend wird ein Anschauungsmittel vorgestellt, das die Rahmungen beider Strömungen in eine Synthese zu bringen versucht. Ferner werden ausgewählte bewegte Unterrichtsaktivitäten für dieses Anschauungsmittel illustriert, um zu exemplifizieren, wie ein Bewegungslernen „mit Tiefgang“ im Fach Mathematik aussehen kann. Abschließend werden Potenziale des vorgestellten Anschauungsmittels und des bewegten Lernens für mathematische Lernprozesse diskutiert.

[1] Mit Strömungen meinen wir im Rahmen dieses Beitrags keine pädagogische Bewegung, wie beispielsweise durch den genannten Bezug zur Reformpädagogik angenommen werden könnte, sondern wir möchten mit diesem Begriff die zwei zentralen Richtungen (also Förderung mathematischer Grundvorstellungen und lernerschließendes Bewegen) als Zugriffe für unsere Schnittstellenbetrachtungen beschreiben.

2 Grundvorstellungen und das Beispiel des Stellenwertverständnisses

Das Streben nach tragfähigen Grundvorstellungen gilt als Schlüssel für einen verstehensorientierten Kompetenzerwerb und als notwendiges Fundament der Entfaltung eines Netzwerks von Begriffen, Konzepten oder auch Strategien im Fach Mathematik. Zentral ist hierfür die Verzahnung unterschiedlicher Darstellungsmodi (z.B. Bruner, 1974). Entsprechend kann es nur dann ein „Verständnis des mathematischen Inhalts [geben], wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in eine andere Darstellung möglich ist“ (Wartha & Schulz, 2013, S. 39). Gemäß Abbildung 1 lassen sich in diesem Sinne Bilder, Handlungen – wozu wir auch Bewegungen zählen werden – sowie reale Situationen unterscheiden, die dann geschriebene und gesprochene mathematische Symbole als zugrundeliegende Grundvorstellungen „aufladen“. Sowohl Sprache als auch Anschauungsmittel (in einem erkenntnistheoretischen Sinne; z.B. Käpnick & Benölken, 2020) gelten für den angedeuteten Prozess als unverzichtbare Moderatoren.

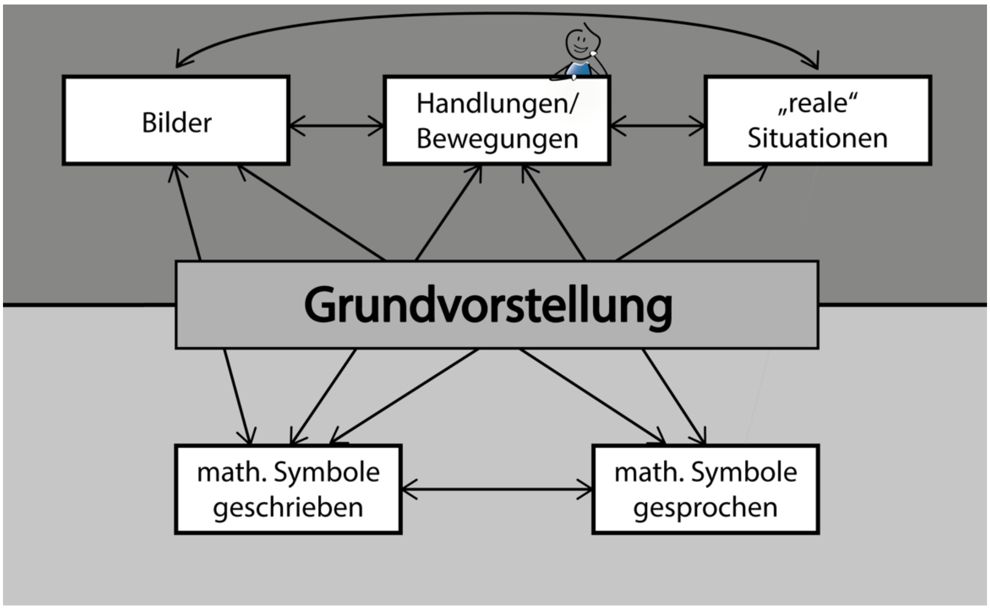


Abbildung 1: Verzahnung von Darstellungsmodi (in Anlehnung an Wartha & Schulz, 2013, S. 30)

Für die Auswahl und Bewertung möglicher Grundvorstellungen zu bestimmten Inhalten sind ein *normativer* (Welche Grundvorstellungen sind z.B. als adäquate Deutungen mathematischer Inhalte beabsichtigt und tragfähig?), ein *konstruktiver* (Welche didaktischen Maßnahmen können für die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen in den Blick genommen werden?) und ein *deskriptiver* Aspekt (Welche Strategien und Vorstellungen zeigen Lernende z.B. tatsächlich bei der Bearbeitung entsprechender Aufgaben?) zu beachten (vom Hofe, 1996).

Exemplarisch lassen sich die zuvor skizzierten Überlegungen anhand des Aufbaus des Stellenwertverständnisses erläutern, einem der zentralen Ziele des Arithmetikunterrichts der Grundschule und der frühen Sekundarstufe I. Zahlreichen nationalen wie internationalen Befunden zufolge gilt es als tragfähig entfaltet, wenn Lernende den „Übersetzungsprozess“ zwischen Zahlworten, -zeichen und -darstellungen fließend und begründet vornehmen können (u.a. Fuson et al., 1997; Ross, 1989; Schulz, 2014; Fromme, 2017). Anschaulicher formuliert: Ein Kind, das erläutern kann, wie sich ein Zahlwort zusammensetzt und wie eine Zahl mit verschiedenen Veranschaulichungen dargestellt wird, das die Ziffern eines Zahlsymbols entsprechend der Stellenwerte deutet und sich dabei auf die Bündelungseinheiten stützt, verfügt über ein tragfähiges Stellenwertverständnis. Fromme (2017) illustriert dies anhand des in Abbildung 2 dargestellten Modells, das zugleich flankierende Lernvoraussetzungen dazu einschließt, wie die Genese des Stellenwertverständnisses im Detail stattfinden könnte (allerdings werden diesbezüglich noch weiterführende empirische Klärungen angeraten; siehe z.B. Schulz, 2014). Während Lernvoraussetzungen hinsichtlich basaler Fähigkeiten im Zählen, Strukturieren und Bündeln sowie im Erfassen von Teil-Ganzes-Beziehungen auf der Grundlage von Modellen zur Entwicklung arithmetischer Kompetenzen bestimmt werden können (z.B. Fritz, Ehlert & Leutner, 2018), stellt beispielsweise die Erkundung von Zusammenhängen zu einem flexiblen Rechnen und damit zur Schnittstelle in Bezug auf Operationsvorstellungen einen Fokus aktueller mathematikdidaktischer Arbeiten dar (z.B. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018).

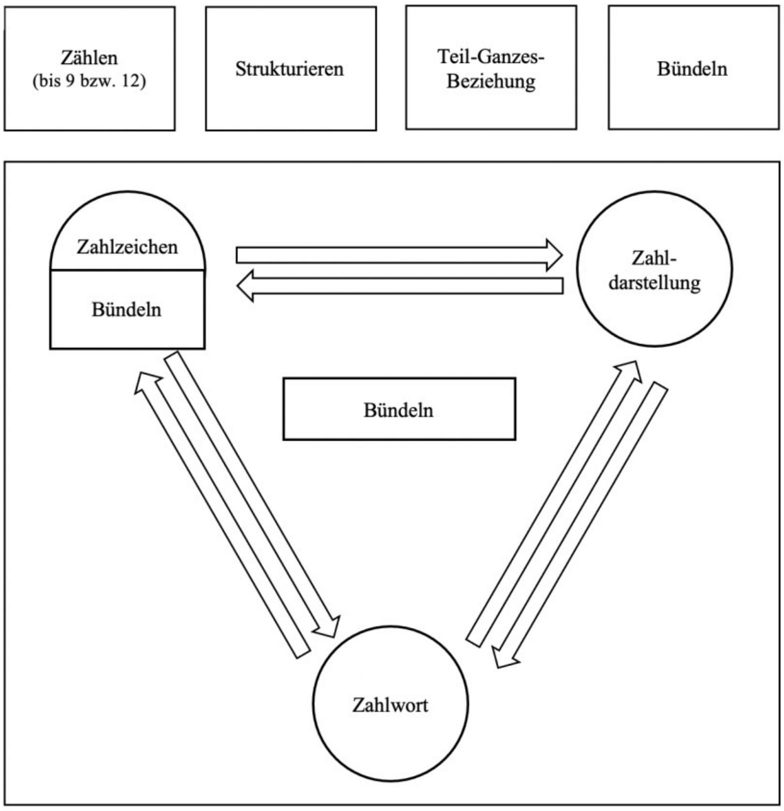


Abbildung 2: Modell zur Beschreibung von Stellenwertverständnis (Fromme, 2017, S. 62)

Während Fromme (2017) die verschiedenen Zahlaspekte im Kontext des Stellenwertsystems implizit durch die verschiedenen Darstellungsweisen einbezieht, unterscheidet Treffers (2001) das Verständnis des Dezimalsystems explizit in die Aspekte „structuring“ und „positioning“. Dabei umfasst die erstgenannte Komponente die auch in Frommes Modell bedachten zentralen Prinzipien von Bündelung sowie Stellenwerten und betont damit das kardinale Zahlverständnis. Die zweite Komponente fokussiert hingegen das ordinale Zahlverständnis. Die damit verbundene Fähigkeit, Zahlen am Zahlenstrahl mit Start- und Endpunkt anordnen zu können, gilt als wichtige Voraussetzung für den Aufbau von Zahl- und Größenvorstellungen. Dieses Verständnis für die Position einer Zahl im Verhältnis zu anderen Zahlen stützt sich u.a. auf Arbeiten von Dehaene (1999): Der Zahlenstrahl entspreche der mentalen Repräsentation numerischer Größen und orientiere sich an der Schreib- und Leserichtung, in der deutschen Sprache also von links nach rechts.

Als Grundlage der in diesem Beitrag vorgestellten Überlegungen zum Stellenwertverständnis dient eine umfassende Synthese der genannten Aspekte. Dabei ist uns bewusst, dass das strukturorientierte Verständnis mit der Einsicht in das Stellenwert- und Bündelungsprinzip ein wichtiges Ziel darstellt, jedoch alleine nicht unbedingt dazu führt, dass Zahlen räumlich verarbeitet werden und die Strukturen für ein vorteilhaftes Rechnen genutzt werden können, weil davon auszugehen ist, dass die Beziehungen zwischen den Darstellungen teilweise nicht erschlossen werden können.

3 Bewegung im Unterricht ist nicht gleich bewegtes Lernen – unterschiedliche Zugänge

Ist „bewegtes Lernen“ ein Lernen, das möglicherweise das Ausleben des natürlichen kindlichen Bewegungsdrangs unterstützt, zudem vielleicht auch noch zur Ausdehnung individuell bisweilen limitierter Konzentrationsspannen beitragen mag, oder findet sich tiefergehende Substanz, die (nicht nur, aber auch) für mathematische Lernprozesse, für den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen aus *konstruktiver* Perspektive (vom Hofe, 1996) wirken kann? Die Frage ist natürlich ebenso suggestiv wie rhetorisch: Mit Laging, Ahmet, Riegel und Stobbe (2010) lassen sich drei Formen von Bewegung im Unterricht kennzeichnen, wobei die eingangs eher provokativ angedeutete Variante irgendwo zwischen einem Lernen „in“ oder „mit Bewegung“ verortet sein mag und vorhandene Arbeiten an der Schnittstelle von Bewegungs- und Mathematiklernen in der Regel solche Zugänge nehmen (etwa Benölken, 2010), die mögliche epistemologische Substanz von Bewegung meist aber teilweise noch nicht oder nur wenig mitgedacht ist – diese bietet gemäß der Abbildung 3 ein Lernen „durch Bewegung“.

Abbildung 3: Ebenen und Formen von Bewegung im Unterricht (in Anlehnung an Laging et al., 2010)

Lernen *durch* Bewegung, also ein lernerschließendes Bewegen, kann spezifische Chancen zur Förderung von Grundvorstellungen eröffnen, wenn die angeregten Bewegungen, ggf. in Verbindung mit geeigneten Anschauungsmitteln, an die Stelle bekannter anderer mentaler Modelle zu einem bestimmten mathematischen Inhalt treten bzw. wenn sie den in diesem Sinne bekannten Kanon erweitern. Dabei werden die Bewegungen auf zeitlicher und inhaltlicher Ebene mit dem Lernprozess verknüpft, und sie lassen sich durch die Abhängigkeit vom mathematischen Inhalt als Handlungen verstehen (daher auch die

Ergänzung des Modells von Wartha und Schulz, 2013, in Abb. 1). Ein solcher Zugang erweitert und subsummiert typische Zugänge zum bewegten Lernen und bekannte didaktische Konzepte wie handlungsorientierten Unterricht: Ein Lernen „durch Bewegung“ meint Handlungen *mit dem ganzen Körper*, ist also nicht auf z.B. Gesten, die weder einem Handlungsvollzug unterliegen noch den ganzen Körper einschließen müssen, oder (in fachdidaktischer Hinsicht) auf „klassische“ Handlungen an einem Material, z.B. das Einstellen einer Zahl am Rechenschieber, beschränkt.

Die Vorstellung, Bewegung und Wahrnehmung im Raum nicht nur z.B. lernbegleitend zu gestalten, sondern Bewegung epistemologisch in einem lernerschließenden Sinne zu nutzen, bietet den Rahmen für den vorliegenden Beitrag.

4 Der Zahlenteppich – ein Anschauungsmittel zur Förderung von Grundvorstellungen zum Stellenwertsystem

„[W]ie ein Kind seinen ‚Zahlenraum‘ gedanklich konstruiert, ist […] untrennbar damit verbunden, was es über das dezimale Stellenwertsystem denkt, weiß, vermutet“ (Gaidoschik, 2009, S. 12) – mit anderen Worten: Ein tragfähiges Stellenwertverständnis ist als fundamentale Grundlage gedanklicher Konstruktionen von Kindern zum Zahlenraum überhaupt zu sehen. Für die Entfaltung (nicht nur) positionsorientierter Vorstellungen finden insbesondere (oftmals angebahnt durch Arbeiten am Zahlenstrahl) strukturierte Anordnungen von Zahlen Anwendung, u.a. die Hundertertafel (vgl. Abb. 4).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abbildung 4: Hundertertafel

Eine grundsätzliche Kritik an solchen strukturierten Anordnungen ist, dass sie zu einseitig ordinalen Zahlvorstellungen und zu einem verfestigten zählenden Rechnen verführen können. Dies bedeutet meist eine zusätzliche Lernhürde für die zu erarbeitenden Inhalte, denn bekanntermaßen sollten zählende Strategien frühzeitig abgelöst werden, vor allem durch die Anbahnung kardinaler Zahlvorstellungen. Dabei stellt sich – auch unter *normativem* Blickwinkel (vom Hofe, 1996) – die Frage, ob die Gefahr einer Beschränkung auf die genannten Vorstellungen nicht durch die Konstruktion der Zahlanordnungen selbst provoziert wird, die zwar lange etablierten Konventionen folgt, die aber kaum noch hinterfragt werden (siehe jedoch z.B. Bauersfeld, 2007).

Eine natürliche Zahl a kann man sich als eine endliche Folge von Ziffern $a_n \dots a_2\, a_1\, a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$) vorstellen. Als Darstellung im dekadischen Stellenwertsystem ordnet man dieser Ziffernfolge nun die folgende Summe zu, wobei die Glieder der Ziffernfolge den jeweiligen Koeffizienten der Summendarstellung entsprechen:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \, 10^i$$

Die Zahl 1234 ist beispielsweise eine Folge der natürlichen Zahlen, die kleiner gleich 4 sind, für die gilt:

$$\begin{aligned} 1234 &= 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Dieser Darstellung wohnen eine quasi vollendete Ästhetik und Gesetzmäßigkeit inne, die Winter (2001, S. 5) wie folgt beschreibt:

> „Das Besondere an der schriftlichen Stellenwertdarstellung von Zahlen als Symbolik ist ihre nicht mehr verbesserbare Systematik, die auch die Grundlage ihrer hochgradigen Effizienz darstellt: Allein mit einer endlichen Zahl von Grundzeichen – Ziffern – (mindestens zwei, bei uns im Dezimalsystem zehn) wird jede Zahl unter Nutzung des Schreibraumes (Stelle!) als Komplex von Ziffern so dargestellt, dass aus der Darstellung Information über die dargestellte Zahl gewonnen werden kann."

Blicken wir zurück auf die Hundertertafel, so fällt auf, dass die Null als zentrales Element von Stellenwertdarstellungen bzw. des Zahlenraums überhaupt fehlt. Ferner orientiert sie sich nicht an der Logik einer räumlich-kognitiven Verarbeitung, da z.B. ein „Blick nach unten" eine Zunahme der Zahlbeträge mit sich bringt.

Wie kann man derartigen Darstellungsproblematiken nun begegnen? Nimmt man sie schlicht in Kauf, da strukturierte Anschauungsmittel wie die Hundertertafel lange etabliert sind? Oder nimmt man den angedeuteten räumlich-kognitiven Impuls – der die Brücke zum Lernen durch Bewegung schlagen kann – auf, um über Alternativen nachzudenken? Eine Möglichkeit für letztgenannte bietet der „Zahlenteppich" – ohne freilich den Wert von Anschauungsmitteln wie der Hundertertafel grundsätzlich in Frage zu stellen, kann er einen Anlass für weiterführende Überlegungen zur Genese eines tragfähigen Stellenwertverständnisses bieten. Der Zahlenteppich greift die oben skizzierte Systematik der Zahldarstellung explizit auf. Er ist eine dezimale Zahlentafel, die durch die Untergliederung in 10 mal 10 Quadrate an eine klassische Hundertertafel erinnert, die sich jedoch in einigen Dingen deutlich von ihr unterscheidet (vgl. Abb. 5).

$10^1 \cdot 9$	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
$10^1 \cdot 8$	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
$10^1 \cdot 7$	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
$10^1 \cdot 6$	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
$10^1 \cdot 5$	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
$10^1 \cdot 4$	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
$10^1 \cdot 3$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$10^1 \cdot 2$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$10^1 \cdot 1$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$10^1 \cdot 0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	$10^0 \cdot 0$	$10^0 \cdot 1$	$10^0 \cdot 2$	$10^0 \cdot 3$	$10^0 \cdot 4$	$10^0 \cdot 5$	$10^0 \cdot 6$	$10^0 \cdot 7$	$10^0 \cdot 8$	$10^0 \cdot 9$

Abbildung 5: Der Zahlenteppich als eine Art Additionstabelle der verschiedenen Ziffern

 https://doi.org/10.11576/dimawe-4556

Unterschiede zur Hundertertafel liegen in einer geänderten Orientierung der Zahlenreihe „von unten nach oben“ (ein „Blick nach oben“ bedeutet somit eine Zunahme der Zahlbeträge) und in der Hinzunahme der Null bei gleichzeitigem Verzicht auf die 100. Dadurch rücken die Zehnerzahlen von der letzten in die erste Spalte, die unten links die Null enthält. Die Ordnung der Zahlen im Sinne des dekadischen Stellenwertsystems wird auf diese Weise explizit: Die Zahl 67 als $10^1 \cdot 6 + 10^0 \cdot 7$ befindet sich z.B. mit den Zahlen in einer Zeile, bei denen die sechs an der Zehnerstelle steht, und mit den Zahlen in einer Spalte, bei denen die sieben an der Einerstelle steht.

5 Beispiele für bewegte Lernumgebungen

Im Folgenden werden Aufgabenformate aus aufeinander aufbauenden bewegten Lernumgebungen zur Förderung des Stellenwertverständnisses vorgestellt, die im Lehr-Lern-Labor „MATHletics“ (zum Konzept: Auhagen et al., 2020) mit Zweitklässler*innen mehrfach erprobt wurden. Dabei werden Erfahrungen aus Durchführungen skizziert, die unter *deskriptiver* Perspektive (vom Hofe, 1996) in Bezug auf den Aufbau von Stellenwertverständnis andeuten, welche Denkstrategien und individuellen Vorstellungen Schüler*innen tatsächlich bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigen.

5.1 Beispiel 1: „Wir bauen einen Zahlenteppich!“

Die *Ziele* der ersten Lernumgebung bestehen darin, den Zahlenteppich als Anschauungsmittel kennenzulernen (aus Sicht der Lernenden) und als Grundlage der Entwicklung mentaler Modelle zu verstehen (hinsichtlich des Aufbaus von Grundvorstellungen). Abstrakter formuliert sollen für den Aufbau des Stellenwertverständnisses selbstständig Positionen für die verschiedenen Zahlen ermittelt werden, die an dieser Stelle noch unbewusst im Bezug zu den Stellenwerten stehen können und somit eine Brücke zum positionsbasierten Verständnis schlagen. Der Zahlenteppich soll von den Kindern entwickelt bzw. aufgebaut werden, z.B. mit großen Ziffernkarten (etwa auf Papier oder Teppichfliesen) – er ist in diesem wie in den weiteren Beispielen stets das grundlegende *Material*. Als Impuls für die *unterrichtliche Durchführung* ist es sinnvoll, die unterste Zeile mit den Zahlen von 0 bis 9 vorzugeben und die Kinder zunächst überlegen zu lassen, wie die Zahlen von 10 bis 19 sinnvollerweise platziert werden können. Auf diese Weise werden die Vorstellungen der Kinder zur räumlichen Anordnung der Zahlen aufgegriffen. Aus unterschiedlichen Ideen ergibt sich im Regelfall eine rege Diskussion, die eine immer weiterführende Systematisierung der Zahlanordnungen motiviert, insbesondere wenn die weiteren Reihen für die Gesamtanordnung berücksichtigt werden. Eine häufig beobachtbare *Strategie* ist, dass Kinder zunächst eine „schlangenartige“ Anordnung der Zahlen vorschlagen, indem sie die 10 über die 9 legen und die Reihe nach links weiterführen. Später folgen einige Kinder der ordinalen Struktur und nutzen dabei ihre Zählkompetenzen (Vorkenntnisse zum Stellenwertverständnis); andere konzentrieren sich auf die runden Zehnerzahlen oder auf Zahlen mit gleicher Einer- oder Zehnerzahl. In dem in Abbildung 6 auf der folgenden Seite angedeuteten *konkreten Beispiel* legte der Schüler im weißen T-Shirt zunächst die 10 über die 9. Zeitgleich legte die Schülerin im rosa T-Shirt die 14 über die 4. Der Schüler im schwarzen T-Shirt legte die 11 links neben die 10 und über die 8. Als die Schülerin im rosa T-Shirt zu den gelegten Zahlen schaute, nahm sie die 14 wieder aus dem Feld. Die Kinder führten die Struktur gemeinsam fort, so dass die Zahlen in einer Art Schlange angeordnet wurden. Durch den Impuls der Lehrerin, sich die Idee der Schülerin anzuhören, sortierten die Kinder die Zahlen in Form der beiden untersten Zeilen des Zahlenteppichs.

				14				11	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Abbildung 6: Kinderaktivitäten zu „Wir bauen einen Zahlenteppich!“

5.2 Beispiel 2: „Finde alle Zahlen!“

Das *Ziel* ist nun, die dezimalen Strukturen herauszuarbeiten, um sie als Stützen eines mentalen Modells nutzen zu können. Die Stellenwerte als positionsbestimmende Merkmale sollen hier bewusst wahrgenommen werden. Zur *unterrichtlichen Durchführung* erhalten die Kinder die Aufgabe, Zahlen mit gewissen Merkmalen zu suchen (z.B. *„Finde alle Zahlen mit einer zwei / mit zwei gleichen Ziffern / mit einer Null!“*). Dazu bietet es sich an, bunte Karten wie in Abbildung 6 als *Material* zum Abdecken bzw. Markieren der entsprechenden Zahlen zu nutzen, um die Bewegungen zur Zahl als Ziel des Suchprozesses zusätzlich visuell zu fixieren. Nachdem alle Zahlen mit dem Merkmal gefunden sind, sollten die kreuzartige Anordnung der Zahlen im Plenum reflektiert und das Vorgehen für die weiteren Merkmale herausgearbeitet werden. Hier bietet es sich zudem an, die Begriffe Zehner- und Einerzahl in Verbindung mit Zeile, Spalte und Diagonale zu thematisieren. Wird zusätzlich die Zeit bei den verschiedenen Durchläufen gestoppt, erhalten die Kinder eine Rückmeldung über die Effizienz ihres Vorgehens. Zu Beginn bestimmen erfahrungsgemäß vor allem zufällige Funde den Prozess. Daraus entwickelt sich als häufig beobachtbare *Strategie* ein systematisches Ablaufen der Zeilen und Spalten. In dem *konkreten Beispiel* in Abbildung 7 auf der folgenden Seite ist andeutungsweise erkennbar, wie die Schüler*innen teilweise noch zögerlich Zahlen abdeckten (begleitet durch überraschte Ausrufe wie *„Da ist noch eine zwei!“*) und dann nach den einzelnen Zeilen und Spalten vorgingen, um sicherzustellen, wirklich alle Zahlen gefunden zu haben. Dieses Vorgehen wurde auch als Grund angeführt, als eine Schülerin zur Sicherheit jede Zeile und somit jedes Feld noch einmal ablief (*„Es gibt keine mehr! Du kannst aufhören.“*).

Abbildung 7: Kinderaktivitäten zu „Finde alle Zahlen!“

5.3 Beispiel 3: „Wege von der Null“

Nachdem die Kinder durch Orientierungsübungen auf dem Zahlenteppich ein stabiles mentales Modell des Zahlenteppichs entwickelt haben, besteht das *Ziel* darin, „Wege“ einzuführen, also Ortsveränderungen des gesamten Körpers auf dem Zahlenteppich, die sich aus einzelnen Schritten als Bewegungen auf ein angrenzendes Feld zusammensetzen (hierdurch wird zugleich das Rechnen auf dem Zahlenteppich vorbereitet). Die Positionen der Zahlen als Ziele eines Weges werden somit als Zusammensetzung einzelner Teile (hier Zehner- und Einerschritte) erfahren. Zur *unterrichtlichen Durchführung* bietet sich z.B. der in Abbildung 8 dargestellte Arbeitsauftrag an.

Finde verschiedene Wege zu der Zahl 32. Starte bei der Null.
Schreibe deine Wege auf.
Wie viele verschiedene Wege hast du gefunden?

Tausche dich mit deinem Partner/deiner Partnerin aus:
Was ist ein guter Weg? Gibt es schwierige Wege? Begründet.
Vergleicht eure Wege: Wie viele Zehnerschritte und wie viele Einerschritte sind es bis zur Zahl 32?

40	41	42	43	44
30	31	32	33	34
20	21	22	23	24
10	11	12	13	14
0	1	2	3	4

Abbildung 8: Arbeitsauftrag zu „Wege von der Null“

Als ergänzendes *Material* sollte den Kindern eine Kopiervorlage zum Notieren ihrer Ergebnisse angeboten werden (z.B. wie in Abb. 9 auf der folgenden Seite). Eine sehr häufig zu beobachtende *Strategie* war, dass entweder erst die Spalte und dann die Zeile (Zehnerschritte, dann Einerschritte) abgelaufen wurde oder umgekehrt. Die Übersetzung auf die ikonische Ebene als Pfeile braucht erfahrungsgemäß bei einigen Kindern etwas Übung, ermöglicht es aber zusätzlich, die Bewegungen visuell zu fixieren. Durch die vielen verschiedenen Wege wird hier bereits eine Grundlage für die Erarbeitung des Kommutativgesetzes der Addition gelegt, was im späteren Verlauf bei konkreten Rechnungen weiter ausgearbeitet werden kann. Das *konkrete Beispiel* der Abbildung 9 verdeutlicht, dass die Schüler*innen durch ein Nutzen verschiedener Wege und über ihre Überlegungen, was ein besonders „guter“ Weg sein mag, dazu übergehen, die Unterscheidung in Zehner- und Einerschritte herauszuarbeiten, da eine systematische Sortierung eine direkte Übersetzung als Zahl ermöglicht.

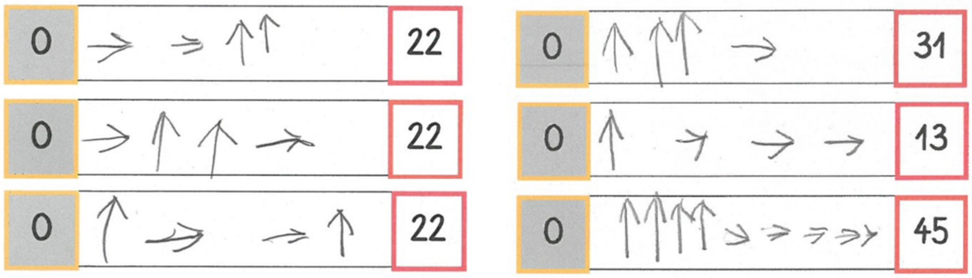


Abbildung 9: Lösungen zu „Wege von der Null“

Die angedeutete Erkenntnis über die Beziehung von Wegen und Zahlen war in Bezug auf den weiteren Lern- und Erkenntnisprozess stets äußerst wertvoll, wie sich bei der Darstellung von Rechnungen als Wegen zur Erarbeitung verschiedener Rechenstrategien in Form des flexiblen Rechnens zeigte, die im Übrigen auch das Potenzial zur Entwicklung von Operationsvorstellungen besitzen. Ein Kind, das anfänglich beispielsweise Schwierigkeiten bei der Übersetzung von Wegen aus der ikonischen in die symbolische Schreibweise zeigte, lief von sich aus im Unterricht bei der Erarbeitung eines Arbeitsblattes zur ikonischen und symbolischen Vertiefung der Wege zum Zahlenteppich, um die Pfeile abzulaufen und den zweiten Summanden bestimmen zu können (siehe Abb. 10).

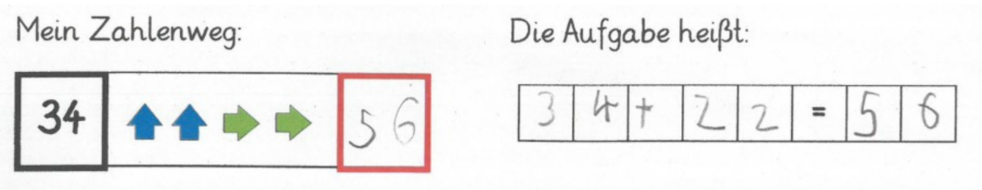


Abbildung 10: Eine Lösung für Rechnungen auf dem Zahlenteppich

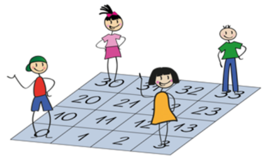
5.4 Beispiel 4: „Vierersummen auf dem Zahlenteppich“

Die dezimale Struktur des Zahlenteppichs bietet vielfältige Möglichkeiten, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten zu entdecken und somit die Bewegungen auf dem Zahlenteppich als Argumentations- und Beweismittel (zu dieser Funktion von Anschauungsmitteln: Krauthausen, 2018) zu nutzen, was die *Ziele* dieser Lernumgebung bestimmt. Dabei wird das gegensinnige Verändern als *Strategie* des flexiblen Rechnens körperlich und räumlich erfahrbar gemacht. Als Beispiel wird der Blick hier auf Vierersummen gerichtet (siehe z.B. MSW NRW, o.J.), um Zusammenhänge gegengleicher Bewegungen entsprechend der Umkehroperationen zum Bestimmen der verschiedenen Summanden einer Summe zu erkunden und zu begründen. Dazu erhalten die Schüler*innen als *Material* einen Forschungsauftrag (vgl. Abb. 11 auf der folgenden Seite) und eine Kopiervorlage zum Notieren verschiedener Lösungen. Es empfiehlt sich für die *unterrichtliche Durchführung* eine Arbeit in Gruppen, wobei sich z.B. vier Kinder über den Teppich bewegen und die übrigen Kinder die Lösungen kontrollieren und notieren.

 https://doi.org/10.11576/dimawe-4556

Diese Kinder haben dieses Zahlenquadrat auf dem Zahlenteppich ausgesucht. Sie addieren die Zahlen, auf denen sie stehen. Sie erhalten die Summe 66.

Forschungsauftrag:
Bewegt euch über das Zahlenquadrat und findet verschiedene Aufstellungen mit der Summe 66.
Wie könnt ihr ganz einfach viele Lösungen finden?
Schreibe deine Entdeckungen auf.
Wieso ist das so? Kannst du es erklären?



Sucht euch ein weiteres Zahlenquadrat aus. Bestimmt die Summe der Eckzahlen.
Könnt ihr eure Entdeckungen auch hier umsetzen?

Abbildung 11: Forschungsauftrag zu den „Vierersummen auf dem Zahlenteppich“

Erfahrungsgemäß sind die meisten Kinder zunächst zögerlich und überprüfen eine jede Summe nach jeder Bewegung rechnerisch. Nachdem sie Sicherheit gewonnen haben, ist eine häufig zu beobachtende *Strategie*, dass sie sich nahezu „tanzend“ mit gegengleichen Bewegungen über den Zahlenteppich bewegen und somit viele weitere Lösungen finden. Das *konkrete Beispiel* der Abbildung 12 zeigt eine systematische Schrittabfolge einer Gruppe, die sich dadurch ergeben hat, dass ein Kind eine Bewegung vorgemacht und das im Quadrat diagonal gegenüberstehende Kind diese durch die Gegenbewegung ausgeglichen hat.

30	31	32	33
20	21	22	23
10	11	12	13
0	1	2	3

30	31	32	33
20	21	22	23
10	11	12	13
0	1	2	3

30	31	32	33
20	21	22	23
10	11	12	13
0	1	2	3

30	31	32	33
20	21	22	23
10	11	12	13
0	1	2	3

Abbildung 12: Lösungen zu den „Vierersummen auf dem Zahlenteppich“

Zusammengefasst lässt sich konstatieren, dass die Kinder in der Regel bereits nach kurzer Zeit ein mentales Modell der Stellenwertdarstellungen bis 100 im Spiegel des Zahlenteppichs entwickelten und dabei sowohl von der symbolischen Ebene in die Bewegung als auch umgekehrt übersetzen sowie auch weitere Entdeckungen zu den Strukturen des Zahlenteppichs (z.B. Umkehrzahlen oder Vierersummen) mit Hilfe von Bewegungen argumentieren konnten. Außerdem wirkte die Arbeit mit dem Zahlenteppich ebenfalls für die Anbahnung von Operationsvorstellungen günstig: Etliche Kinder gingen beispielsweise selbstständig dazu über, Rechnungen in Form von Wegen abzuschreiten.

6 Ein Blick zurück nach vorn

Natürlich ist dieser Beitrag als Diskussionsimpuls zu verstehen, der versucht, die Förderung mathematischer Grundvorstellungen und lernerschließendes Bewegen als zwei bekannte Strömungen miteinander zu verbinden, um aus interdisziplinärer Perspektive einen Beitrag dazu zu leisten, Ansätze zum Aufbau von Schüler*innenvorstellungen weiterzudenken. Anhand einiger Beispiele wurde illustriert, dass die Bewegungen Kindern als Handlungen mit und auf dem Zahlenteppich eine aktive Auseinandersetzung eröffnen. Insbesondere Reflexionen dieser Bewegungen haben zur mentalen Konstruktion des Inhalts beigetragen, indem beispielsweise durch eine Begründung der Anordnungen der Zahlen, durch gemeinsames Umsortieren oder auch durch ein systematisches Finden von Zahlen mit gleichen Zehner- oder Einerzahlen die Beziehungen zwischen den Zahlen des Zahlenteppichs und somit in der Systematik des Aufbaus zentrale Aspekte des Stellenwertsystems erkannt wurden. Die Zahlenanordnung des Zahlenteppichs ist freilich keine Neuerfindung. So beginnt beispielsweise Schindlers (1778) „Tabelle zum Zählen" mit der Null und das „Hunderterblatt" von Bauersfeld (2007) ist von unten nach oben orientiert. Interessant bleibt die Frage, wieso sich die Konvention der Anordnung in der Hundertertafel durchsetzte, wo doch die im Zahlenteppich getroffene – auch, aber nicht nur aus Perspektive des bewegten Lernens – unter normativer Sicht offenkundige Vorteile aufweist. Ein besonderes Potenzial liegt darin, den Zahlenteppich als körper- und raumorientiertes Anschauungsmittel (vgl. Högger, 2013) zu begreifen. Vor diesem Hintergrund weist die Anordnung des Zahlenteppichs aber auch fach-substanzielle Potenziale auf, um dem Stellenwertverständnis immanente Prinzipien zu verdeutlichen, sowohl hinsichtlich des positions- als auch hinsichtlich des strukturorientierten Verständnisses. Der Zahlenteppich besitzt darüber hinaus das Potenzial, das Zählen und das Bündeln als Voraussetzungen für das Stellenwertverständnis fachlich konsistent erfahrbar werden zu lassen. An der Schnittstelle zum Operationsverständnis gilt dies ähnlich für Rechenstrategien (u.a. das Bilden von Analogien). Natürlich ist in jedem Fall auf eine ausgewogene Balance in Bezug auf das auch für diesen Beitrag leitende ganzheitliche Stellenwertverständnis gegenüber einseitig positions- und damit ordinal-orientierten Akzenten zu achten. Den epistemologischen Nutzen des Zahlenteppichs als Anschauungsmittel unabhängig von Verbindungen zum bewegten Lernen zu erkunden, bietet aus unserer Sicht bereits einen vielversprechenden Aufhänger für anknüpfende Arbeiten. Ähnliches ist für den erkenntnistheoretischen Wert eines *Lernens durch Bewegung* anzunehmen, der u.E. noch nicht umfassend erforscht ist, der aber eine gewinnbringende Erweiterung der „Angebotspalette" möglicher Grundvorstellungen bieten kann, um die Möglichkeiten individuell beschreitbarer Lernwege zu erweitern. Hier ergeben sich unmittelbare Anknüpfungspunkte an Fragen eines produktiven Umgangs mit Diversität und Möglichkeiten umfassender Individualisierung und Personalisierung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse. Wie erste vergleichbare Publikationen (z.B. Bayer, Kleindienst-Cachay & Rottmann, 2018) versucht sich der vorliegende Beitrag an ersten Impressionen, angebunden an ein konkretes Beispiel. Tiefergehende Erkundungen für andere Inhalte sowie mit oder ohne flankierende Anschauungsmittel(n) bieten für die Zukunft ein reichhaltiges Feld möglicher Anschlussarbeiten.

Literatur und Internetquellen

Arndt, P.A., & Sambanis, M. (2017). *Didaktik und Neurowissenschaften. Dialog zwischen Wissenschaft und Praxis.* Tübingen: Narr Francke Attempto.

Auhagen, W., Beckmann, S., Beumann, S., Dexel, T., Radünz, L., Tiedke, A., et al. (2020). Lehr-Lern-Labore auf Distanz? Ein Erfahrungsbericht aus der Mathematikdidaktik. *DiMawe – Die Materialwerkstatt, 2* (1), 63–86. https://doi.org/10.4119/dimawe-3974

Bauersfeld, H. (2007). *Für kleine Mathe-Profis*. Hallbergmoos: Aulis.

Bayer, F., Kleindienst-Cachay, C., & Rottmann, T. (2018). Förderung der Multiplikation durch Bewegungsspiele. *Sportunterricht, 67* (7), 309–315.

Benölken, R. (2010). Anspruchsvolle mathematische Bewegungsspiele – auch und gerade für Mädchen. *MNU Primar, 2* (3), 95–98.

Bruner, J.S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Pädagogischer Verlag Schwann.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7825-8

Fritz, A., Ehlert, A., & Leutner, D. (2018). Arithmetische Konzepte aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39* (1), 7–41. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0131-6

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100*. Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-14775-4

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Olivier, A.I., Carpenter, T.P., et al. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (2), 130–162. https://doi.org/10.2307/749759

Gaidoschik, M. (2009). Kein „Zahlenraum" ohne Stellenwertdenken. *Grundschule Mathematik, 20* (1), 12–15.

Högger, D. (2013). *Körper und Lernen. Mit Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen.* Bern: Schulverlag plus AG.

Käpnick, F. (2004). „Aber große Zahlen sind stark…" – Subjektive Zahlauffassungen von Kindern. *Sache Wort Zahl, 32* (60), 12–18.

Käpnick, F., & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin: Cornelsen Scriptor. https://doi.org/10.1007/978-3-662-60872-2

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Laging, R. (2006). *Warum macht „Bewegte Schule" Sinn? Hintergründe und Entwicklung der Bewegten Schule.* Zugriff am 28.06.2021. Verfügbar unter: https://edugroup.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Bewegte_Schule/Warum_macht_Bewegte_Schule_Sinn_Laging_2006.pdf.

Laging, R., Ahmet, D., Riegel, K., & Stobbe, C. (2010). *Mit Bewegung Ganztagsschule gestalten.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Lorenz, J.H. (2013). Strategieübungen für flexibles Rechnen. *Mathematik differenziert, 4* (1), 29–31.

MSW NRW (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen) (Hrsg.). (o.J.). *Lernaufgaben Mathematik. Grundschule: Zahlen und Operationen – „Forscherauftrag zu Vierersummen auf der Hundertertafel"*. Zugriff am 28.06.2021. Verfügbar unter: https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/2051.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5

Ross, S.H. (1989). Parts, Wholes and Place Value: A Developmental View. *Arithmetic Teacher, 36* (6), 47–51. https://doi.org/10.5951/AT.36.6.0047

Schindler, A. (1778). *Der Hauslehrer oder Beyträge zum Privatunterricht in den nöthigsten Lehrgegenständen.* Prag: Verlag der k.k. Normalschulbuchdruckerei.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen* (Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik, Bd. 2.) Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-08693-0

Thiel, A., Teubert, H., & Kleindienst-Cachay, C. (2013). *Die „Bewegte Schule" auf dem Weg in die Praxis. Theoretische und empirische Analysen einer pädagogischen Innovation.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Tobinski, D., & Fritz, A. (2018). Lerntheorien und pädagogisches Handeln. In A. Fritz, D. Tobinski & W. Hussy (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 222–246). München: Ernst Reinhardt.

Treffers, A. (2001). Numbers and Numbers Relationships. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (S. 101–120). Utrecht: Freudenthal Institute.

vom Hofe, R. (1996). Arithmetische Grundvorstellungen und funktionales Denken. *mathematica didactica, 19*, 28–42.

Wartha, S., & Schulz, A. (2013). *Rechenproblemen vorbeugen* (2. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Winter, H. (2001). Grundschule: Inhalte mathematischen Lernens. *Bildungsserver Rheinland-Pfalz.* Zugriff am 28.06.2021. Verfügbar unter: https://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Mathematik/Winter_Inhalte_math_Lernens.pdf.

Beitragsinformationen

Zitationshinweis:

Radünz, L., & Benölken, R. (2021). Mathematische Grundvorstellungen durch Bewegungen aufbauen. Potenziale bewegten Lernens aufgezeigt am Beispiel von Bewegungen auf dem „Zahlenteppich" zur Förderung des Stellenwertverständnisses. *DiMawe – Die Materialwerkstatt, 3* (1), 40–54. https://doi.org/10.11576/dimawe-4556

Online verfügbar: 06.07.2021

ISSN: 2629–5598